

日本学士院賞 受賞者

中島 なかしま

啓 ひらく



専攻学科目 数学

生年 昭和三七年十一月  
略歴 昭和六〇年 三月  
同 六二年 三月  
同 六二年 四月  
平成 三年 五月  
同 四年 四月  
同 七年 四月  
同 九年 四月  
同 一二年 二月  
同 二〇年 一〇月

東京大学理学部数学科卒業

東京大学大学院理学系研究科修士課程修了

東京大学理学部助手

理学博士

東北大学理学部助教授

東京大学大学院数理学研究科助教授

京都大学大学院理学研究科助教授

京都大学大学院理学研究科教授

京都大学数理解析研究所教授（現在に至る）

## 理学博士中島 啓氏の「幾何学的表現論 と数理論物理学」に対する授賞審査要旨

中島 啓氏は幾何学的表現論、数理論物理学、可積分系において顕著な業績をあげている数学者である。

表現論とは、さまざまな代数構造を行列などで具体的に表して研究する学問である。幾何学的表現論は代数構造を具体的に表すための手段として図形を用いる。近年数理論物理学の一部で二〇世紀以後に発展した高度な抽象数学を用いた研究が盛んになってきたが、中島氏の業績はそのような研究の中で中心的位置を占めている。

### (一) 幾何学的表現論

代数系を行列で表現するとき、単に表現を決める行列を書き出すだけではなく、なぜそのような行列が代数系を表現しているかが分かる意味深いやり方で表現を構成することが望ましい。古典的には、群  $G$  がある空間  $X$  に作用しているとき、 $X$  上の関数のなすベクトル空間を考えると、その上にも  $G$  が作用しこれから  $G$  の表現を構成する。

中島氏もやはり幾何学的方法で表現を構成するが、そのやり方

は上記の従来のものとは根本的に異なる革新的な方法である。すなわち、モジュライ空間（ゲージ理論の基本方程式の解空間や、ヒルベルト概系）の無限列を用いて、そこから表現を構成し研究する。

### (二) 簾多様体

中島氏は（クロンハイマーと共同で）重力場のインスタントンと呼ばれる重要な四次元空間上のゲージ理論（ヤン・ミルズ方程式）を研究し、その解空間をグラフが定める行列の方程式で記述した。

そこで現れたような、グラフに基づく行列の方程式によって記述される空間の概念を、中島氏は一般化し、彼が簾多様体とよんだ空間概念を発見した。

さらに、中島氏は簾多様体が量子群と密接な関係を持つことを見いだした。それをもとに、簾多様体から定まる関数が保型性という数論や表現論などにも現れる重要な性質を持つことが見いだされた。

この保型性は後に超対称性をもつゲージ理論の双対性（ $Z$  超対称ゲージ理論の  $S$  双対性）が発見されたときその最も重要な例の一つとなっている。

簾多様体を用いた表現論の研究は、その後、多くの数学者が研究する重要な分野になっており、中島氏による簾多様体の発見から一〇年以上たった現在においても、簾多様体の研究は大変活発であり、

中島氏自身も繁多様体の表現論において多くの重要な業績を上げている。

### (三) ヒルベルト概型

さらに中島氏はある空間上の点の配置から定まる空間（ヒルベルト概型）からハイゼンベルグ代数の表現が定まることを発見した。これは弦理論の双対性からヒントを得て構成されたものである。

これらの構成で革新的な点は、単独のモジュライ空間を使って構成するのではなく、無限個のモジュライ空間をいっぺんに使って表現を構成する点である。たとえば、ヒルベルト概型を使った構成では、ある決まった個数  $n$  個の点のヒルベルト概型だけを使うのではなく、 $n$  を様々に変えた無限種類のヒルベルト概型を一度に用いることにより、ハイゼンベルグ代数の表現が構成される。また、ヤンミルズ方程式を用いる場合でも第二チャーン数が様々な無限種類のモジュライ空間をいっぺんに用いて表現を構成する。これは、場の量子論において、粒子が生成消滅を繰り返すので、その数を特定せず一度に扱うことが重要であることに対応する。

これらは、図形を用いて代数系の表現を与えるという幾何学的表現論の最近におけるもつとも重要な成果の一つと見なされている。

### (四) 超対称ゲージ理論

さらに中島氏は、超対称四次元ゲージ場のサイバークーウィツテ

ン対称性の数学的定式化である、ネクラソフ予想を証明している。（吉岡氏との共同研究、ネクラソフ・オクニコフらによっても独立になされている。）

サイバークーウィツテンの対称性は、ヤンミルズ場とモノポール場を関係づけるものであった。それは、ゲージ理論物理で重要であっただけでなく、数学、特に四次元多様体の位相幾何学にも大きな影響を与えた。

しかし、ヤンミルズ場とモノポール場の関係そのものの数学的な理解はなかなか進まず、なぜ、モノポール場を考えることがヤンミルズ場と同様な数学的結果をもたらすかは、数学的には理解されていなかった。ネクラソフ予想とその証明は、この点を大きく改善したものであった。

そのことの大きな現れは、ネクラソフ予想を用いることになされた、サイバークーウィツテン不変量とドナルドソン不変量の一致の代数曲面に対しての証明（ゲッチェ氏、吉岡氏との共同研究）である。これは四次元のヤンミルズ場とモノポール場の相対性の数学的にもつとも重要な帰結とされていた事実、代数曲面の場合に、数学的な厳密な証明を与えるものであった。

このように、中島氏は数理物理学と幾何学の交叉する領域でも著しい成果を上げている。

以上のように、中島 啓氏は、幾何学、表現論、数理論理学、可積分系などの多くの分野が交叉する領域で、大変重要な成果を多く上げており、その業績は、日本学士院賞授賞に相応じしものである。

## 論文リスト

- [1] Nakajima, Hiraku, Removable singularities for Yang-Mills connections in higher dimensions. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* 34 (1987), no. 2, 299-307.
- [2] Nakajima, Hiraku, Compactness of the moduli space of Yang-Mills connections in higher dimensions. *J. Math. Soc. Japan* 40 (1988), no. 3, 383-392.
- [3] Nakajima, Hiraku, Hausdorff convergence of Einstein 4-manifolds. *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.* 35 (1988), no. 2, 411-424.
- [4] Bando, Shigetoshi; Kasue, Atsushi; Nakajima, Hiraku, On a construction of coordinates at infinity on manifolds with fast curvature decay and maximal volume growth. *Invent. Math.* 97 (1989), no. 2, 313-349.
- [5] Nakajima, Hiraku, Moduli spaces of anti-self-dual connections on ALE gravitational instantons. *Invent. Math.* 102 (1990), no. 2, 267-303.
- [6] Kronheimer, Peter B.; Nakajima, Hiraku, Yang-Mills instantons on ALE gravitational instantons. *Math. Ann.* 288 (1990), no. 2, 263-307.
- [7] Nakajima, Hiraku, Self-duality of ALE Ricci-flat 4-manifolds and positive mass theorem. *Recent topics in differential and analytic geometry*, 385-396, Adv. Stud. Pure Math., 18-I, Academic Press, Boston, MA, 1990.
- [8] Itoh, Mitsuhito; Nakajima, Hiraku, Yang-Mills connections and Einstein-Hermitian metrics. *Kähler metric and moduli spaces*, 395-457, Adv. Stud. Pure Math., 18-II, Academic Press, Boston, MA, 1990.
- [9] Gochō, Toru; Nakajima, Hiraku, Einstein-Hermitian connections on hyper-Kähler quotients. *J. Math. Soc. Japan* 44 (1992), no. 1, 43-51.
- [10] Nakajima, Hiraku, Monopoles and Nahm's equations. *Einstein metrics and Yang-Mills connections (Sendai, 1990)*, 193-211, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 145, Dekker, New York, 1993.
- [11] Nakajima, Hiraku, Gauge theory on resolutions of simple singularities and simple Lie algebras. *Internat. Math. Res. Notices* 1994, no. 2, 61-74.
- [12] Nakajima, Hiraku, Homology of moduli spaces of instantons on ALE spaces. *I. J. Differential Geom.* 40 (1994), no. 1, 105-127.
- [13] Nakajima, Hiraku, Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras. *Duke Math. J.* 76 (1994), no. 2, 365-416.
- [14] Nakajima, Hiraku, A convergence theorem for Einstein metrics and the ALE spaces. *Selected papers on number theory, algebraic geometry, and differential geometry*, 79-94, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, 160, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
- [15] Nakajima, Hiraku, Resolutions of moduli spaces of ideal instantons on  $\mathbb{R}^4$ . *Topology, geometry and field theory*, 129-136, *World Sci. Publ.*, River Edge, NJ, 1994.
- [16] Nakajima, Hiraku, Varieties associated with quivers. *Representation theory of algebras and related topics (Mexico City, 1994)*, 139-157, CMS Conf. Proc., 19, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.
- [17] Nakajima, Hiraku, Hyper-Kähler structures on moduli spaces of parabolic Higgs bundles on Riemann surfaces. *Moduli of vector bundles (Sendai, 1994; Kyoto, 1994)*, 199-208, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 179, Dekker, New York, 1996.
- [18] Nakajima, Hiraku, Instantons and affine Lie algebras. S-duality and mirror symmetry (Trieste, 1995). *Nuclear Phys. B Proc. Suppl.* 46 (1996), 154-161.
- [19] Nakajima, Hiraku, Heisenberg algebra and Hilbert schemes of points on projective surfaces. *Ann. of Math. (2)* 145 (1997), no. 2, 379-388.

- [20] Nakajima, Hiraku, Gauge theory on resolutions of simple singularities and affine Lie algebras. *Singularities and complex geometry (Beijing, 1994)*, 183-192, AMS/IP Stud. Adv. Math., 5, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.
- [21] Nakajima, Hiraku, Quiver varieties and Kac-Moody algebras. *Duke Math. J.* 91 (1998), no. 3, 515-560.
- [22] Nakajima, Hiraku, Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces. University Lecture Series, 18, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999. xii+132 pp.
- [23] Ito, Yukari; Nakajima, Hiraku, McKay correspondence and Hilbert schemes in dimension three. *Topology* 39 (2000), no. 6, 1155-1191.
- [24] Nakajima, Hiraku, Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras. *J. Amer. Math. Soc.* 14 (2001), no. 1, 145-238.
- [25] Nakajima, Hiraku, Quiver varieties and tensor products. *Invent. Math.* 146 (2001), no. 2, 399-449.
- [26] Nakajima, Hiraku,  $T$ -analogue of the  $q$ -characters of finite dimensional representations of quantum affine algebras. *Physics and combinatorics (Nagoya, 2000)*, 196-219, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2001.
- [27] Nakajima, Hiraku, Geometric construction of representations of affine algebras. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. I (Beijing, 2002)*, 423-438, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.
- [28] Nakajima, Hiraku, Convolution on homology groups of moduli spaces of sheaves on  $K3$  surfaces. *Vector bundles and representation theory (Columbia, MO, 2002)*, 75-87, Contemp. Math., 322, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [29] Nakajima, Hiraku,  $t$ -analogs of  $q$ -characters of Kirillov-Reshetikhin modules of quantum affine algebras. *Represent. Theory* 7 (2003), 259-274 (electronic).
- [30] Nakajima, Hiraku,  $t$ -analogs of  $q$ -characters of quantum affine algebras of type  $A_n$ ,  $D_n$ . *Combinatorial and geometric representation theory (Seoul, 2001)*, 141-160, Contemp. Math., 325, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [31] Nakajima, Hiraku, Reflection functors for quiver varieties and Weyl group actions. *Math. Ann.* 327 (2003), no. 4, 671-721.
- [32] Nakajima, Hiraku, Cells in quantum affine algebras. Proceedings of the International Conference on Algebra. *Algebra Colloq.* 11 (2004), no. 1, 141-154.
- [33] Beck, Jonathan; Nakajima, Hiraku, Crystal bases and two-sided cells of quantum affine algebras. *Duke Math. J.* 123 (2004), no. 2, 335-402.
- [34] Nakajima, Hiraku, Extremal weight modules of quantum affine algebras. *Representation theory of algebraic groups and quantum groups*, 343-369, Adv. Stud. Pure Math., 40, Math. Soc. Japan, Tokyo, 2004.
- [35] Nakajima, Hiraku; Yoshioka, Kōta, Lectures on instanton counting. *Algebraic structures and moduli spaces*, 31-101, CRM Proc. Lecture Notes, 38, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [36] Nakajima, Hiraku, Quiver varieties and  $t$ -analogs of  $q$ -characters of quantum affine algebras. *Ann. of Math. (2)* 160 (2004), no. 3, 1057-1097.
- [37] Nakajima, Hiraku; Yoshioka, Kōta, Instanton counting on blowup. II.  $K$ -theoretic partition function. *Transform. Groups* 10 (2005), no. 3-4, 489-519.
- [38] Nakajima, Hiraku; Yoshioka, Kōta, Instanton counting on blowup. I. 4-dimensional pure gauge theory. *Invent. Math.* 162 (2005), no. 2, 313-355.
- [39] Hernandez, David; Nakajima, Hiraku, Level 0 monomial crystals. *Nagoya Math. J.* 184 (2006), 85-153.
- [40] Nakajima, Hiraku, Crystal, canonical and PBW bases of quantum affine algebras. *Algebraic groups and homogeneous spaces*, 389-421, Tata Inst. Fund. Res. Stud. Math., *Tata Inst. Fund. Res., Mumbai*, 2007.
- [41] Nakajima, Hiraku, Sheaves on ALE spaces and quiver varieties. *Mosc. Math. J.* 7 (2007), no. 4, 699-722, 767.
- [42] Göttsche, Lothar; Nakajima, Hiraku; Yoshioka, Kōta, Instanton counting and Donaldson invariants. *J. Differential Geom.* 80 (2008), no. 3, 343-390.
- [43] Nakajima, Hiraku, Quiver varieties and branching. *SIGMA Symmetry Integra-*

*bilby Geom. Methods Appl.* 5 (2009), Paper 003, 37 pp.

*Math. J.* 12 (2012), no. 3, 633-666, 669-670.

- [44] Göttsche, Lothar; Nakajima, Hiraku; Yoshioka, Kōta, K-theoretic Donaldson invariants via instanton counting. *Pure Appl. Math. Q.* 5 (2009), no. 3, Special Issue: In honor of Friedrich Hirzebruch. Part 2, 1029-1111.
- [45] Nakajima, Hiraku,  $t$ -analogs of  $q$ -characters of quantum affine algebras of type  $E_6, E_7, E_8$ . *Representation theory of algebraic groups and quantum groups*, 257-272, *Progr. Math.*, 284, Birkhäuser/Springer, New York, 2010.
- [46] Nakajima, Hiraku; Yoshioka, Kōta, Perverse coherent sheaves on blow-up. II. Wall-crossing and Betti numbers formula. *J. Algebraic Geom.* 20 (2011), no. 1, 47-100.
- [47] Nakajima, Hiraku, Quiver varieties and cluster algebras. *Kyoto J. Math.* 51 (2011), no. 1, 71-126.
- [48] Nakajima, Hiraku; Yoshioka, Kōta, Perverse coherent sheaves on blowup, III: Blow-up formula from wall-crossing. *Kyoto J. Math.* 51 (2011), no. 2, 263-335.
- [49] Jimbo, Michio; Kashiwara, Masaki; Kawai, Takahiro; Miwa, Tetsuji; Nakajima, Hiraku; Oshima, Toshiro, Preface to the special issue: "The Golden Jubilee of Algebraic Analysis". *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 47 (2011), no. 1, 1-9.
- [50] Göttsche, Lothar; Nakajima, Hiraku; Yoshioka, Kōta, Donaldson = Seiberg-Witten from Mochizuki's formula and instanton counting. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* 47 (2011), no. 1, 307-359.
- [51] Nagao, Kentaro; Nakajima, Hiraku, Counting invariant of perverse coherent sheaves and its wall-crossing. *Int. Math. Res. Not. IMRN* 2011, no. 17, 3885-3938.
- [52] Nakajima, Hiraku; Yoshioka, Kōta, Perverse coherent sheaves on blow-up. I. A quiver description. *Exploring new structures and natural constructions in mathematical physics*, 349-386, *Adv. Stud. Pure Math.*, 61, *Math. Soc. Japan*, Tokyo, 2011.
- [53] Nakajima, Hiraku, Handsaw quiver varieties and finite  $W$ -algebras. *Mosc.*