理学博士渡辺信三氏の「確率解析の研究」に対する授賞審査要旨

拡散過程のランダムな軌道を確率微分方程式

$$dX_t = a(X_t)dt + \sigma(X_t)dw_t, \quad X_0 = x$$

の解 $X_t = X_{t,x}(w)$ として表現するために、確率積分が導入された。これが確率解析の起源である。この拡散過程の推移確率分布はフォッカー・プランク方程式を弱い意味で満たす。

一九七八年にマリヤヴァン（P. Malliavin）は、ウィーナー空間の上に滑らかな汎関数の概念を導入して、確率解析に画期的進歩をもたらした。この理論によれば、係数 a、σ が滑らかで、かつ σ が非退化の時には、$X_{t,x}(w)$ は、非退化かつ滑らかな汎関数となり、推移確率分布は滑らかな密度を持ち、その密度 $p(t,x,y)$ はフォッカー・プランク方程式の強い意味の基本解となる。

一九八四年に渡辺信三氏は、ウィーナー空間の上に超汎関数の概念を導入して、その理論を構築し、これを応用して、推移確率密度 $p(t,x,y)$ の t に関する漸近展開問題を解決した。

一九六二年以来、渡辺氏は確率過程、確率微分方程式、確率解析の研究に専念し、マルチンゲール確率積分（国田寛氏と共著）、加法的汎関数（本尾実氏と共著）、分枝過程（池田信行、長沢正雄両氏と共著）、境界条件を持つ確率微分方程式、エクスカーション点過程と拡散過程などに関する多数の数学論文を発表した。いずれも新しいアイディ

アに溢れ、その分野の研究者に高く評価されている。また、池田信行と共著の「確率微分方程式と拡散過程」は、基礎概念から最新の結果までを要領よくまとめた名著で、この分野の多数の研究者に大きい影響を与えた。

渡辺氏の業績の中で最も卓越しているのは、ウィーナー空間の上の超汎関数の理論の構築であろう。渡辺氏は、シュワルツ（L. Schwartz）の超関数（distribution）の理論の無限次元化として、ウィーナー空間の上の超汎関数を導入し、その負の微分指数のソボレフ・ノルムを定義し、超汎関数の理論を展開した。この理論によれば、Fが滑らかで非退化の汎関数で、Tがシュワルツの緩増加超関数の時には、その結合 $T \circ F$ は超汎関数となる。

この渡辺理論は数多くの分野に応用できるが、一例として、前述の推移確率密度 $p(t, x, y)$ の時変数 t に関する漸近展開問題について説明しよう。渡辺氏は、

$$p(t, x, y) = \langle \delta_y \circ X_{t,x}, 1 \rangle = \mathrm{E}(\delta_y \circ X_{t,x})$$

がなりたつことに着目して、まず超汎関数 $\delta_y \circ X_{t,x}$ が t について漸近展開を持つことを示し、その係数を定めるアルゴリズムを与え、平均をとって、直ちに $p(t, x, y)$ の漸近展開を導いた。$\delta_y \circ X_{t,x}$ の漸近展開は、ウィーナー測度のスケール変換不変性とディラックのデルタの線形変換公式を用いて、実に見事に証明されている。

$p(t, x, y)$ はフォッカー・プランク方程式の基本解であるからその漸近展開問題自体は放物型偏微分方程式に関するもので、解析学の範疇に属する。渡辺氏はこれを超汎関数 $\delta_y \circ X_{t,x}$ の漸近展開問題にまで持ちあげて確率解析の枠に入れて解き、平均をとってもとの問題を解決するという所謂確率論的手法を用いたのである。

確率論的手法は確率論研究者にとって魅力のあるテーマであり、角谷静夫、J. L. Doob, G. Hunt の調和関数、ポ

テンシャル論の研究、マリヤヴァンの準楕円性の研究は好例である。前述の漸近展開問題の確率論的研究もJ. L. Bismutを始め、多数の研究者によって試みられたが、$\delta_y \circ X_{t,x}$をうまく捉えることができず、複雑な計算のため見通しがきかなくて、満足すべき結果には到達できなかった。渡辺氏は$\delta_y \circ X_{t,x}$を超汎関数として捉え、その理論を駆使して、この困難を見事に克服したのである。

渡辺氏は池田信行、楠岡成雄、重川一郎、杉田洋の諸氏と共に解析学、幾何学、数理物理学にあらわれる楕円型作用素を含む諸問題（例えば、Atiyah-Singerの指数定理）を、超汎関数を用いて、研究し、続々成果を挙げつつある。

このように独創的な超汎関数の概念を導入し、その理論を作り上げ、多彩な応用の可能性を示した渡辺信三氏の確率解析への貢献は、極めて大きい。渡辺氏はこの業績によって平成元年日本数学会秋季賞を授与されている。

主要な論文・著書リスト

（A）論文

I. 確率微分方程式、拡散過程に関するもの

1. (with H. Kunita) On square integrable martingales, Nagoya Math. J., 30 (1967), 209–245.
2. On stochastic differential equations for multi-dimensional diffusion processes with boundary conditions, I, II, J. Math. Kyoto Univ., 11 (1971), 169–180; 11 (1971), 545–551.
3. On time inversion of one-dimensional diffusion processes, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb., 31 (1975), 115–124.

4. Solution of stochastic differential equations by random time change, Appl. Math. Optimization, 2 (1975), 90–96.
5. Poisson point process of Brownian excursions and its applications to diffusion processes, Proc. Symp. Pure Math. Amer. Math. Soc., 31 (1977), 153–164.
6. (with N. Ikeda) A comparison theorem for solutions of stochastic differential equations and its applications, Osaka J. Math., 14 (1977), 619–633.
7. (with N. Ikeda) Heat equation and diffusion on Riemannian manifold with boundary, Proc. Int. Symp. SDE Kyoto 1976 (ed. by K. Itô), Kinokuniya, Tokyo (1978), 75–94.
8. Construction of diffusion processes with Wentzell's boundary conditions by means of Poisson point processes of Brownian excursions, Probability theory, Banach Center Publication Vol. 5, Warsaw (1979), 255–271.
9. (with Y. Takahashi) Probability functionals (Onsager-Machlup functions) of diffusion processes, Stochastic Integrals, Proc. LMS Durham Symp. 1981 (ed. D. Williams), LNM. 851, Springer (1981), 433–463.
10. (with S. Kotani) Krein's spectral theory of strings and generalized diffusion processes, Functional Analysis in Markov processes, Proc. Katata-Kyoto, 1981 (ed. M. Fukushima), LNM. 923, Springer (1982), 235–256.
11. (with Y. LeJan) Stochastic flows of diffeomorphisms, Taniguchi Intern. Symp. Stochastic Analysis, Katata-Kyoto, 1982 (ed. K. Itô), Kinokuniya (1984), 307–332.
12. Stochastic flows of diffeomorphisms, Probability Theory and Mathematical Statistics, Proc. 4-th

USSR-Japan Symp. (ed. K. Itô and J. V. Prokhorov), LNM. 1021, Springer (1983), 699–708.

13. (with N. Ikeda) Stochastic flows of diffeomorphisms, Advances in Probability and Related Topics, Vol. 7 (ed. M. Pinsky), Marcel Dekker (1984), 179–198.
14. Excursion point processes and diffusions, Proc. ICM Warszawa, PWN-Polish Scientific Publishers (1984), Invited Address, 1117–1124.
15. Construction of semimartingales from pieces by the method of excursion point processes, Ann. Inst. Henri Poincaré, Sup. au n 2, 23 (1987), 297–320.

II. 確率解析に関するもの

1. Malliavin's calculus in terms of generalized Wiener functionals, Theory and Applications of Random Fields, Proc. IFIP Conf. Bangalore 1982, (ed. G. Kallianpur), LNIC. 49, Springer (1983), 284–290.
2. (with N. Ikeda) Introduction to Malliavin calculus, Taniguchi Intern. Symp. Stochastic Analysis, Katata-Kyoto, 1982 (ed. K. Itô), Kinokuniya (1984), 1–52.
3. (with N. Ikeda) Malliavin calculus of Wiener functionals and its applications, From Local Times to Global Geometry, Control and Physics, Warwick Symp. SDE 1984/85 (ed. K. D. Elworthy), Pitman RNMS, 150 (1986), 131–178.
4. Analysis of Wiener functionals (Malliavin calculus) and its applications to heat kernels, Special Invited Paper, Annals of Probab., 15 (1987), 1–39.
5. Generalized Wiener functionals and their applications, Probability Theory and Mathematical Statistics, Proc. 5-th Japan-USSR Symp. (ed. S. Watanabe and Yu. V. Prokhorov), LNM. 1299, Springer (1989), 541–548.

6. (with H. Uemura) Diffusion processes and heat kernels on certain nilpotent groups, Stochastic Analysis, Proc. French-Japanese Seminar (ed. M. Metivier and S. Watanabe), LNM. 1322, Springer (1988), 173−197.
7. (with I. Shigekawa and N. Ueki) A probabilistic proof of the Gauss-Bonnet-Chern theorem for manifolds with boundary, Osaka J. Math. 26, (1989), 897−930.
8. Short time asymptotic problems in Wiener functional integration theory. Applications to heat kernels and index theorems, Stochastic Analysis and Related Topics II, Proc. Silivri 1988 (ed. H. Korezlioglu and A. S. Ustunel), LNM. 1444 (1990), 1−62.
9. Donsker's δ-functions in the Malliavin calculus, Stochastic Analysis, Liber Amicorum for Moshe Zakai (ed. E. Mayer-Wolf, E. Merzbach and A. Skwartz), Academic Press (1991), 495−502.
10. Disintegration problems in Wiener functional integrations, Probability Theory, Proc. 1989, Singapore Probability Conf. (ed. L. H. Y. Chen, K. P. Choi, K. Hu, J.-H. Lou), Walter de Gruyter (1992), 181−198.
11. Some refinement of conditional expectations on Wiener space by means of the Malliavin calculus, Probability Theory and Mathematical Statistics, Proc. 6-th USSR-Japan Symp. (ed. A. N. Shiryaev, V. S. Korolyuk, S. Watanabe, M. Fukushima), World Scientific (1992), 414−421.
12. A fractional calculus on Wiener space, Stochastic Processes, A Festschrift in Honour of Gopinath Kallianpur (ed. S. Cambanis, J. K. Ghosh, R. L. Karandikar, P. K. Sen), Springer (1993), 341−348.
13. Fractional order Sobolev spaces on Wiener space, Probab. Theory Relat. Fields, 95 (1993), 175−198.

（B）著書

1. 確率微分方程式、一九七五、産業図書、一九六頁。
2. (with N. Ikeda) Stochastic differential equations and diffusion processes, North Holland, Kodansha, 1981. Second Edition, 1989, 535 pages.
3. Lectures on stochastic differential equations and Malliavin calculus, Lectures on Mathematics and Physics, 73, Tata Institute of Fundamental Research, Springer, 1984, 111 pages.