理学博士佐藤幹夫君の「超函数の理論およびその応用」に対する授賞審査要旨

十七世紀における Newton, Leibniz による微積分の発明に始まる解析学は、爾来「函数概念の拡張」がなされた機会ごとに飛躍的に進歩発展して来た。佐藤幹夫君が一九五八年に発表した「超函数」は、それまでに得られていた函数概念の拡張をすべて含む劃期的な函数概念として、微分方程式論、多様体論および数理物理など解析学の研究に新生面を開き国際的に高く評価された多くの著しい成果を挙げつつあり、その貢献によって一九七〇年のニースにおける国際数学者会議において特別講演をなす可く招かれ、また同年朝日文化賞を（研究協力者小松彦三郎東大助教授と連名にて）受けている。以下佐藤君の主要業績について述べる。（佐藤君の業績の大要は Hyperfunctions and Pseudo-differential Equations, Lecture Notes in Mathematics 287 (1973), Springer-Verlag 及び日本数学会編集の機関誌「数学」の「超函数特集号（一九七三年）」に見られる）。

一、超函数概念の導入

十七世紀における微積分の発明以後になされた函数概念の劃期的な拡張としては、十八世紀において Fourier の三角級数による函数の表現に基づく「不連続函数」の導入、ついで Cauchy の冪級数による函数の表現に基づく「解析函数」の導入があった。今世紀に入ってからは、二十年代に物理学者 Dirac が量子力学における オブザバブルの

スペクトル解析を表現するためにいわゆる「デルタ函数」を導入したが、その有用性にも関らず、Diracが与えた形の不連続性を有する函数は数学的に存在し得ないので、「擬函数」と呼ばれていた。一九四八年にSchwartzが部分積分の概念に基づく函数概念の拡張として「ディストリビューションの理論」を発表し、デルタ函数をディストリビューションの一例として数学的に捉え得ることを示した。佐藤君は、ディストリビューションが「無限回微分可能な函数の空間における連続線形汎函数」という稍々技巧的な定義によって与えられるのに対して、「複素解析函数の境界値」として「超函数」を具体的に定義した(1)、すなわち、「複素数平面から実数軸を除いたところで定義された任意の複素解析函数 $F(x+iy)$ に対して、その実数軸上の境界値 $f(x)=F(x+io)-F(x-io)$ を一般的に定義し得る」ことを証明し、このようにして得られる $f(x)$ をもって実数軸上の一般化された函数「超函数」の定義とした。この考えによれば、$z\neq o$ において正則な解析函数 $F(x+iy)=\frac{-1}{2\pi i}\frac{1}{z}$ の境界値としてデルタ函数 $\delta(x)=f(x)$ が疑義なく定義されるのである。しかも一般に、解析函数 $F(z)$ の $z\neq o$ における導函数 $F'(z)$ の境界値として極めて自然に、「超函数」$f(x)$ の「微分超函数」$f'(x)$ を定義し得る。ゆえにデルタ函数の如き「不連続」なものも含めて「すべての超函数は無限回微分可能になる」ので、超函数はDiracの元来の志向に良く適しているのである。佐藤君が示したように、超函数の概念はディストリビューションの概念を特別の場合として含む、のみならず超函数は解析函数と密接に結び付いているという具体性を手がかりとして、超函数論の展開が円滑に進められることは右の微分の導入からも明らかであろう。

上には一変数の場合の超函数について述べたが、多変数の場合には、「解析函数の境界値」の概念は実数軸にあた

るものが複雑に入り混っているために、一変数の場合のように簡単に扱うことができない。佐藤君は一変数の場合の超函数の定義を精細に解析し、これを位相幾何学における「ホモロヂィ論」の言葉で表現し直すことによって一般の次元にも通用する超函数の定義を与えることに成功した(2、5)。佐藤君がこのために作った「層係数の相対コホモロヂィ論」は、以後の偏微分方程式論のみならず代数幾何学などの研究にも欠く可からざる方法となり、数年後に Grothendieck が佐藤君と独立にこの方法を再発見したことは有名である。

二、マイクロ函数の理論

超函数の考えに基づく線形偏微分方程式の研究は小松彦三郎に始まり Harvey, Bengel などがこれにつづいて、定数係数方程式の場合に著しい結果が得られていたが、変数係数方程式の場合の一般的な取扱いは、佐藤君が一九六九年に「マイクロ函数」の理論を作るまで着手されなかった。佐藤君は、超函数の特異性すなわち解析函数の差を無視することによって得られる超函数の同値類が、超函数の定義されている実解析多様体の余接球バンドル S^*M の上の成分に分解されることを見出だし、このように分解して得られる S^*M の上の層Cを「マイクロ函数の層」と呼んだ(6)。実解析函数を係数とする線形偏微分作用素 $P(x, D)$ は、自然に「マイクロ局所写像」$C \to C$ を惹き起こすが、これは S^*M 上の P の特性多様体の外では全単射写像になることが証明される(6、7)。佐藤君のこの基本定理によって、楕円形方程式の超函数解の解析性は直ちに導かれるのである。

三、擬微分作用素および量子接触変換

層Cにマイクロ局所的に作用する写像は微分作用素よりもはるかに広い族を作る。その中では Nirenberg や Hörmander がディストリビューション理論に導入した「擬微分作用素」に当たるものが超函数理論においてはさらに重要な役割りをつとめるのである。すなわち Hörmander や Egorov は、S*M の開集合Uから S*N の開集合Vの上への接触変換 Φ に対して、対応する特性多項式の変換が Φ と一致するようなU上の擬微分作用素からV上の擬微分作用素への変換が存在することを示した。佐藤君は河合隆裕・柏原正樹両君とともに、（佐藤の）擬微分作用素について右のような変換をすべて決定し得ることを示し、これを与えられた接触変換 Φ に対する「量子化した接触変換」と名づけた(10)。両者の関係が古典力学と量子力学との関係に類似しているからである。佐藤・河合・柏原三君はさらに、Uにおける単一特性の擬微分方程式 $Pu=f$ は適当な量子化接触変換によって次のいずれか一つに変換できることを示した(8、10、14)、すなわち $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}=f$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}+i\dfrac{\partial u}{\partial x_2}=f$, $\dfrac{\partial u}{\partial x_1}\pm ix_1\dfrac{\partial u}{\partial x_n}=f$, のいずれかへ変換される。この最後の方程式すなわちいわゆる Lewy- 溝畑の方程式に変換されるもとの方程式が一般に解をもたない理由を明らかにしたのも三君の著しい貢献である。

四、概均質ベクトル空間や場の量子論などへの応用

Riemann のゼータ函数の函数等式は x_+^s の Fourier 変換が同じ形の超函数になることから証明される。佐藤君はこのようなことが成り立つ根拠を求めて、「概均質ベクトル空間」の概念に到達してその一般理論を作り、かつ新谷卓郎君の協力を得て「既約な概均質ベクトル空間の分類」を完成し多くのゼータ函数の函数等式等を得た(4、9、16)、その経歴の示すように理論物理学をも修めた佐藤君は、超函数およびマイクロ函数の理論を場の量子論に応用することに興味をもち、「S行列」の解析性または因果律の公理を、運動量表示をとったときのマイクロ局所条件と

して与えようという提案をしている(15)。佐藤君はなお超函数論の見地から線形偏微分方程式系を研究し、とくに多変数であって常微分方程式と同じような振舞をする「極大過剰決定系」について著しい結果を得た(10)。最近佐藤君は、河合、柏原両君などとともにこれを「マイクロ局所解析」と名づけ、概均質ベクトル空間の相対不変式のフーリエ変換や場の量子論におけるファインマン積分の特異性など多くの問題に適用して内外の注目を集めつつある(17)。

以上要するに佐藤君は従来得られていたデルタ函数やディストリビューションなどの一般化された函数の概念を、解析函数の境界値という全く新らしい見地から統一発展させた超函数の概念を創造しこれを偏微分方程式論や多様体に応用して数々の顕著な業績を挙げた。

このように佐藤君の超函数およびその微細構造としてのマイクロ函数の理論が解析学の進歩に基本的な貢献をしたことは国際的にも広く認められているところである。

一、主要な論文目録

1. On a generalization of the concept of functions. Proc. Japan Acad., 34 (1958), 126–130.
2. On a generalization of the concept of functions II. Proc. Japan Acad., 34 (1958), 604–608.
3. 超函数の理論、数学、一〇(一九五八)、一—二七。
4. Theory of hyperfunctions I. J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, Sect. I, 8 (1959), 139–193.
5. Theory of hyperfunctions II. J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo, Sect. I, 8 (1959), 387–437.
6. Hyperfunctions and partial differential equations. Proc. Internat. Conf. on Functional Analysis and Related Topics 1969, Univ. of Tokyo Press (1970), 91–94.
7. Regularity of hyperfunction solutions of partial differential equations. Actes Congrés Internat. Math.

1970, Gautier-Villars (1971), 2, 785–794.
8. On pseudo-differential equations in hyperfunction theory. Summer Inst. on Partial Differential Equations, Berkeley 1971, Amer. Math. Soc. (with T. Kawai and M. Kashiwara).
9. On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 59 (1972), 1081–1082 (with T. Shintani).
10. Hyperfunctions and pseudo-differential equations. Lecture Notes in Math. 287, Springer-Verlag (1973), 265–529 (with T. Kawai and M. Kashiwara).
11. Pseudo-differential equations and theta functions. Colloque Internat. CNRS sur les Equations aux Dérivées Partielles Linéaires, Astérique 2 et 3, Soc. Math. France (1973), 286–291.
12. Microlocal structure of a single linear pseudo-differential equation. Séminaire Goulaouic-Schwartz 1972–1973, Ecole Polytechnique, No. 18.
13. On the structure of single linear pseudo-differential equations. Proc. Japan Acad., 48 (1972), 643–644 (with T. Kawai and M. Kashiwara).
14. 超函数における擬微分方程式論、超函数特集号、数学、二五、(一九七三)、二一三—二三八。
15. 行列のミクロ解析性について、超函数と線形微分方程式II、京大数理解析研究所講究録、二〇九(一九七四)、一一—二五(河合隆裕記)
16. On zeta functions associated with prehomogeneous vector spaces. Ann. of Math., 100 (1974), 131–170 (with T. Shintani).
17. Recent development in hyperfunction theory and its application to physics (Microlocal analysis of S-matrices and related quantities.), International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics, Lecture Notes in Physics, 39, Springer-Verlag (1975), 13–29.