理学博士小平邦彦君「調和積分及びその応用に関する研究」に対する授賞審査要旨

調和積分の理論は十九世紀の初めに数学界に登場したアーベル積分の理論を多変数の場合へ拡張し一般化しようとして考えられたものであり、それが関連する方面は代数学、解析学、幾何学等広汎なる範囲に及び十九世紀以後の数学の発展の主流をなすものである。しかも之に関する小平邦彦君の業績はこの発展の根幹をなす一連の基本定理を殆んど一人で完成したものであり、その結果の主要さに依り一九五四年アムステルダムに於ける国際数学者会議(International Congress of Mathematicians)からフィールズ賞を授与された。

周知の如くアーベル函数(又はアーベル積分)の理論は示性数(genus)が1の場合は楕円函数(又は楕円積分)の理論であり、後者はルジャンドル(Legendne)、アーベル(Abel)、ヤコビ(Jacobi)、ワイヤストラス(Weierstrass)等によつて既に十九世紀の中頃迄に完成されたのであるが、示性数が1より大なる一般の場合の研究も同時に問題とされるべきは当然である。この問題は最初アーベルとヤコビに依つて取り上げられ、リーマン(B. Riemann)に依つて体統的に完成された。即ちリーマンは一八五七年アーベル函数の被積分函数である所の代数函数を彼の創意に成る所謂リーマン面(Riemann surfaces)上で考え、アーベル積分の正則性、特異性を用いて之を三種に分類し、且つ正則函数の実部と虚部とが夫々調和函数であることを利用して、存在定理を証明した。併しこの推論には誤りのある事がワイヤス

トラスに依つて指摘されたが、後にヒルベルト(D. Hilbert)が之を補正し、更にワイル(H. Weyl)は簡単化、明瞭化した。これ一九一三年の事である。

一方之等の理論の多変数の場合への拡張は永く停頓して見るべき研究が少なかつたのであるが、一九四〇年以後ホッヂ(W. V. D. Hodge)、ワイル、ド・ラム(G. de Rham)等の研究によつて急激な発展を見るに至つた。之等の諸氏はリーマンの方針に倣つて先ず調和函数を多変数の場合へ拡張する事から始めた。即ちリーマン面の代りにリーマン多様体を用い、その上で定義せられたp階のテンソール場φに対し、その双対テンソール場、その外微分d及び双対微分δを導入し、ラプラス・ベルトラミ(Laplace-Beltrami)の演算子を$\triangle=d\delta+\delta d$で定義し、$\triangle\varphi=0$となるテンソール場$\varphi$を調和テンソール場と名付けた。次いで積分路の代りにはp次元の鎖(chains)を用い、その上で調和テンソールを積分したものを「調和積分(harmonic integrals)」と命名して、之に関してリーマン流の存在定理を証明した。併しホッヂやド・ラムの研究はリーマンの云う第一種即ち正則な場合に限られていたのである。

之に対し小平君は先ず一九四四年当日本学士院に三回にわたる論文

Über die Harmonischen Tensorfelder in Riemannschen Mannigfaltigkeiten, I・II・III. (Proceedings of the Imperial Academy, 20 (1944))

を提出し、ワイルの正射影の方法を用いて之等の存在定理を証明し、更に進んで調和テンソール場が特異性を持つ場合の研究への端緒を開いた。次いで一九四八年には

Relations between harmonic fields in Riemannian manifolds (Math. Japan. 1 (1948)),

On the existence of analytic functions on closed analytic surfaces (Kodai Math. Sem. Rep. 2 (1949))
で後者の研究を更に進めて、リーマン多様体上での極(pole)を定義し、極と零を用いて因子(divisor)を導入し、古典的な意味でのリーマン・ロッホの定理(theorem of Riemann-Roch)を証明した。併しリーマンの研究の完全な拡張は、複素多様体特にケラー(Kähler)多様体上での有理型微分式に対するリーマン・ロッホの定理の完成である。何となれば代数的多様体が複素射影空間内に埋没されたコムパクトな複素多様体と一致する事が、一九四九年チャウ(W. L. Chow)によつて証明され、後者はケラー多様体の最も重要なる例であるからである。小平君の研究も一九五一年以後は専らこの方面に集中されている。

即ち小平君は先ず

Green's forms and meromorphic functions on compact analytic varieties (Canad. J. Math. 3 (1911))

で第三種積分の存在定理をケラー多様体に於て証明し、次いで

The theorem of Riemann-Roch on compact analytic surfaces (Amer. Math. 13 (1951)),

The theorem of Riemann-Roch for adjoint systems on 3-dimensional algebraic varieties (Ann. of Math. (2) 56 (1952)),

The theorem of Riemann-Roch for adjoint systems on Kählerian varieties (Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 38 (1952), Ann. of Math. Studies 30 (1953))

等に於て、順次に複素2次元の場合、複素3次元の場合、複素一般n次元の場合に対するケラー多様体でのリーマン・

ロッホの定理を完成した。

抑々リーマン・ロッホの定理は多様体V上に因子と称せられる有理型函数の族Dを与え、Dの如何なる函数gとの積もV上で正則となるような有理型函数の凡てからなる族Fの一次性に関する次元を決定する定理であり、この次元を表わすのにVを特性化する数値を用いるのである。

代数的多様体のこの数値としては古くから3種の算術的示性数と称せられるものが知られ、且つ既に一九〇九年セヴェリ(F. Severi)は之等3種の示性数が一致する事を予想したのであるが、この予想を実現したのは一九五二年の小平君の論文

Arithmetic genera of algebraic varieties (Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 38 (1952))

である。

一方で上記の函数族FはVが代数的多様体の場合V上での複素直線バンドル (complex line bundle) 上に係数を持つ0次コホモロジー群と同型となる。小平君は之に関し一九五三年以来他の一般の次元の場合をも含めてコホモロジー群の詳しい研究を遂行し

On a differential geometric method in the theory of analytic stacks (Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 39 (1953))

等に於て、このコホモロジー群が正の次元につき多くの場合0となる事を確め得た。そしてこの結果を用いて一九五四年には当時懸案であつた次の重要な問題にも肯定的解決を与えた。即ちコムパクトな複素多様体族はケラー多様体

族をその特殊のものとして含み、ケラー多様体族はホッヂ多様体族を特殊のものとして含み、且つ之等三者は互に一致しない族であるけれども、ホッヂ多様体族に含まれる代表的多様体族が果して前者と一致するであろうかと云うのである。この解決を発表した論文が

On Kähler varieties of restricted type (an intrinsic characterization of algebraic varieties)(Ann. of Math. (2), 60 (1954))

である。